DR. KISS SÁNDOR főiskolai docens
Bessenyei György tanárképző Főiskola
Tanítóképző Intézet
Nyíregyháza

Matematikai teszt általános iskolásoknak

Az utóbbi években egyre nagyobb népszerűségre tettek szert az ún. feleletválasztós matematikai tesztversenyek (pl.: Zrínyi Ilona verseny, Gordiusz, Kenguru, USA és ausztrál tesztversenyek stb.), amelyek lényege, hogy egy adott feladatra 5 lehetséges választ adnak meg, s ezek közül kell a helyeset kiválasztani. Elfogadható, hogy valamelyik kérdésre nem válaszolunk, ha nem tudjuk a helyes választ. Ilyenkor is jutalompont jár, mert tudja a versenyző, hogy ő ezt nem tudja megválaszolni. A tanárok számára azért hasznosak, mert viszonylag nagy kérdésszám esetén reálisan mérik a tanulók tudását, s ugyanakkor gyorsan lehet javítani a „dolgozatot". Kétségtelen, hogy objektíven mérik a tanulók aktuális felkészültségi szintjét.

A jól megszerkesztett tesztfeladatok készítésének lélektani, módszertani alapját ***a tipikus tanulói gondolkodási hibák*** adják. Igazából nem is feladat kitalálása a nehéz, hiszen egy módszertanilag többé-kevésbé jól felkészült tanár rengeteg feladatot ismer, s mégsem biztos, hogy ezekből tud egy jó tesztsort összeállítani. Nagyon leegyszerűsíti a kérdést az, aki azt hiszi, hogy elengedő valamelyik tippnél a jó választ megadni, a többihez pedig beírunk valamit. A tesztkészítés szépségét pontosan az adja meg, hogy a tanuló hibásan oldja meg a feladatot, és a rossz választ megtalálja a tippek között, aminek természetesen örül. Csak a helyes tipp megismerése után döbben rá a gondolkodásbeli hibájára, s remélhetően megjegyzi a jó megoldási módot is.

A gondolkodási hibák kutatása fontos lélektani kérdés is. Több hazai és külföldi kutató munkássága nyomán (Faragó László, Mosonyi Kálmán, Beke Manó, Weimer, Ranschburg, Szeliánszky, Piaget, Mencsinszkaja stb.) a „klassszikus " matematikaoktatásban – számtan, mértan – előforduló fontosabb hibák többsége feltártnak tekinthető, ma már ezeket rendszerezhetjük, tipizálhatjuk. Feltáratlanok a matematika modernebb témáiban – halmazok, függvények, szabályjátékok, sorozatok, valószínűségszámítás stb. – tapasztalható típushibák. Ezek között elsősorban a kombinatorikai feladatok elemzése áll közel néhány kutatóhoz (pl.: Csapó, Kiss). Ez érthető is, hiszen általános iskolában kombinatorikából viszonylag kevés a tananyag, a gondokodáslélektani alapokat pedig Piaget már feltárta.

A témánk szempontjából fontosabb gondolkodási hibák[1] a következők:

⇒ a feladatok szövegének meg nem értéséből származó hibák,

⇒ a feladatok kérdésének félreértéséből származó hibák, amelyek többnyire arra vezethetők vissza, hogy a tanuló „jól" válaszol, de nem a feltett kérdésre,

⇒ hamis analógián alapuló hibák, a feladat valamely részének, valamely feltételnek figyelmen kívül hagyása,

⇒ begyakorlottsági hibák, pl.: zárójel helyes elhagyása.

⇒ a szaknyelv (szakkifejezések, fogalmak, szimbólumok, konvenciók stb.,) nem kellő ismeretéből származó hibák,

⇒ a rendszeralkotás képességének hiánya, a lehetőségek felszínes vizsgálata, bizonyos esetek kihagyása, mások többszörös beszámítása kombinatorikai jellegű feladatokban.

[1] Részletesebb kifejtésüket lásd: Mosonyi (1972.)

Az alábbiakban ismertetjük a Szabolcs-Szatmár-Bereg megyei Ambrózy Géza matematika verseny 1998/99. tanévi tesztjét, amelyet VI–VIII. osztályos tanulók részére tűztünk ki. A megyében két tanuló ért el hibátlan teljesítményt. Legalább 90%-ot kb. 20 tanuló ért el, ami – szerintünk – országos mércével is kiváló teljesítménynek mondható.

A tesztfeladatok többségének megoldását is bemutatom, illetve néhány esetben gondolkodás-lélektani megjegyzéseket is fűzök azokhoz.

1. Hány négyjegyű természetes szám van?

(A) 8999 (B) 9000 (C) 9001 (D) 9999 (E) 10000

2. Egy üveg és a benne lévő 20 egyforma tabletta teljes tömege 180 gramm. Amikor az üveg csak 15 tablettát tartalmazott, akkor 165 gramm volt a tömege. Hány gramm az üveg?

(A) 103 (B) 115 (C) 120 (D) 125 (E) 146

3. Három kislány mindegyike almát vitt egy-egy kosárban. Mindegyik kosárban ugyanannyi alma volt. Találkoztak 9 fiúval, akik almát kértek a lányoktól. Mindegyik kislány ugyanannyi almát adott mindegyik fiúnak, ezek után mindegyik fiúnak és lánynak ugyanannyi almája lett. Hány alma lehetett összesen a három lány kosárban.

(A) 18 (B) 21 (C) 24 (D) 27 (E) 36

4. Az ábrán látható 5x5-ös táblázat mezői kitölthetők az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekkel úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban, mindkét átlóban mindegyik számjegy pontosan egyszer szerepel. Melyik számjegy kerül a satírozott mezőbe?

1	2	3	4	5
	1	2	3	

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

5. Mennyi a következő kifejezés értéke:

(A) -28 (B) -60 (C) -17 (D) 11 (E) -4

6. Mivel egyenlő $5x-2\cdot(4-x)$?

(A) 7x-8 (B) 3x-8 (C) 7x-6 (D) 3x-6 (E) 4x-8

7. Ha két tyúk két nap alatt két tojást tojik, akkor 6 tyúk 6 nap alatt hány tojást tojik?

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 18 (E) 27

8. Négy fiú és három lány ült le egy hétszemélyes padra úgy, hogy sem két lány, sem két fiú nem került egymás mellé. Hány ültetési sorrend képzelhető el?

(A) 24 (B) 30 (C) 35 (D) 21 (E) 144

9. Hány számjegy szerepel a $2^{19}\cdot 5^{12}$ felírásában?

(A) 19 (B) 12 (C) 14 (D) 13 (E) 15

10. Egy energiatarékosságra törekvő ember egymás után három sikeres javítást fedez fel, amelyekkel sorjában 20, 25, 55%-ot tud megtakarítani háza fűtésdíjából. Hány százalékot tudott az újításával megtakarítani?

(A) $33\frac{1}{3}$ (B) 27 (C) 73 (D) $66\frac{2}{3}$ (E) 100

11. Mivel egyenlő: $1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{4}}}$?

(A) $\frac{29}{15}$ (B) $\frac{46}{19}$ (C) $\frac{11}{4}$ (D) $\frac{27}{13}$ (E) $\frac{59}{29}$

12. Írj a betűk helyére számjegyeket a következő összeadásban!

$$\overline{BC}+C=\overline{AB}$$

A különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek, az azonos betűk azonos számjegyeket, első számjegyként nem állhat 0. Hány megoldása van a feladatnak?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) ezek egyike sem

13. Peti véletlenszerűen háromjegyű számokat írat ki a számítógép képernyőjére. Legkevesebb hányat kell kiíratnia ahhoz, hogy legyen közöttük kettő, amelyekben a számjegyek összege egyenlő?

(A) 10 (B) 27 (C) 28 (D) 451 (E) ezek egyike sem

14. Marcinak hétszer annyi pénze van, mint Gergőnek. Ha Marci adna 65 forintot Gergőnek, akkor már csak kétszer annyi pénze lenne, mint mint Gergőnek. Hány forintja van Marcinak és Gergőnek együtt?

(A) 120 (B) 80 (C) 104 (D) 208 (E) 312

15. Egy dolgozatíratáskor két osztály (20 illetve 30 fős) ugyanazt a feladatsort kapta, és a pontozás is megegyezett. Az egyik osztály 20 tanulója 80%-os, a másik osztály 30 tanulója 70%-os átlagos teljesítményt nyújtott. Mekkora volt a két osztály átlagos teljesítménye együttesen?

(A) 75% (B) 74% (C) 72% (D) 77% (E) ezek egyike sem

16. Mivel egyenlő a 6432 és 132 legnagyobb közös osztójánál 8-cal kisebb szám?

(A) -6 (B) 6 (C) -2 (D) 3 (E) 4

17. Ha egy 10 cm sugarú kör sugarát 2 cm-rel csökkentjük, akkor hány %-kal csökken a területe?

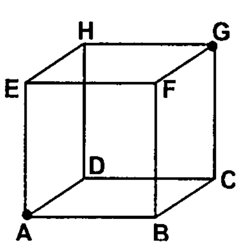
(A) 20 (B) 25 (C) 36 (D) 40 (E) 64

18. Egy tetszőleges háromszög egyik szögét változatlanul hagyjuk, de a közrezáró oldalak egyikét háromszorosára, a másikat pedig négyszeresére növeljük. Hányszorosára nő a háromszög területe?

(A) 7-szeresére (B) 9-szeresére (C) 12-szeresére
(D) 16-szorosára (E) ezek egyike sem

19. Egy 10 cm oldalú ABC szabályos háromszög C csúcsa egybeesik egy 10 cm sugarú kör középpontjával. Az AC oldal egyenese a kört D-ban metszi. Mekkora az ADB szög?

(A) 15° (B) 20° (C) 25° (D) 30° (E) 45°



20. Az ábrán látható ABCDEFGH kocka A csúcsából G csúcsába a lehető legrövidebb úton akarunk eljutni élek mentén. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

(A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 36

21. Egy országban csak 25 és 10 petákos érmék vannak. Annának 5x+1 darab 25 petákosa van. Bélának x+5 darab. Ha a pénzüket átváltják 10 petákosba, akkor hány darab lesz a különbség pénzeik között?

(A) $10(x-1)$ (B) $\frac{2}{5}(4x-4)$ (C) $\frac{2}{5}(x-1)$ (D) $\frac{5}{2}(x-1)$ (E) más érték

22. Egy téglalap alakú telek fele olyan széles, mint amilyen hosszú. A telek teljesen be van kerítve x méter hosszú kerítéssel. Mekkora a területe x függvényében?

(A) $\frac{x^2}{2}$ (B) $2x^2$ (C) $\frac{2x^2}{9}$ (D) $\frac{x^2}{18}$ (E) $\frac{x^2}{72}$

23. Az ábrán látható téglalapot az oldalakkal párhuzamos vágásokkal négy részre vágtuk. A kapott részek közül __három__ területét beírtuk. Mekkora a negyedik terület?

24	36
	12

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16
(E) ezek egyike sem

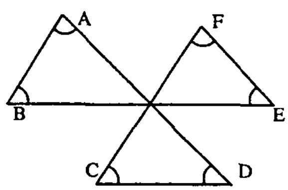
24. Az x, y, z számok aránya 2:3:5. Az x, y, és z számok összege 100. Az y-ról tudjuk, hogy $y = a \cdot x - 10$. Ekkor az __a__ értéke:

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{5}{2}$

25. Egy gazda az __n__ tehénből álló csordáját úgy osztotta fel a négy fia között, hogy az első kapta a csorda felét, a második az egy negyedét, a harmadik az egy ötödét, a negyedik pedig 7 tehenet kapott. Ekkor __n__ értéke:

(A) 80 (B) 100 (C) 140 (D) 180 (E) 240

26. Hány fok az ábrán jelzett hat szög összege?



(A) 180° (B) 270° (C) 360° (D) 150°
(E) ezek egyik sem

27. Mivel egyenlő a következő kifejezés értéke?

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

(A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{1}{50}$ (C) $\frac{99}{50}$ (D) $\frac{1}{5050}$ (E) $\frac{3}{10100}$

28. Egy 50 számból álló halmaz számtani átlaga (számtani közepe) 38. Ha a halmazból kiveszünk két számot – nevezetesen a 45-öt és az 55-öt –, akkor a megmaradt számok számtani közepe:

(A) 36,5 (B) 37 (C) 37,2 (D) 37,5 (E) 37,52

29. Legyen N=9+99+999+...+999...9, ahol az utolsó szám 999 darab 9-est tartalmaz. Hány 1-est tartalmaz N?

(A) 996 (B) 998 (C) 999 (D) 1000 (E) 1001

30. Egy autó a 240 kilométeres útját oda 40 km/óra, visszafelé 60 km/óra átlagos sebességgel tette meg. A vezető a következő útján elhatározta, hogy ugyanezt az utat most már odavissza egyenletes sebességgel teszi meg, s ugyanannyi idő alatt, mint előző útján. Mekkora sebességgel kell most haladnia?

(A) 48 km/óra (B) 50 km/óra (C) 45 km/óra

(D) 55 km/óra (E) ezek egyike sem

A feladatok helyes tippjei:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	E	B	A	A	D	E	E	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	C	E	B	E	C	C	D	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	D	B	A	C	C	B	D	C	A

Útmutató a megoldásokhoz

3. A gyerekek száma 12, ezért az almák száma ennek többszöröse. A 24 kevés, mert nem lehet a 9 kislány között egyenlően szétosztani. A 36 jó, mert ekkor minden kislánynak 12 almája van, mindegyik ad mindegyik fiúnak 1 almát, így a fiúknak és a lányoknak is 3-3 almája lesz.
A helyes tipp: **E**.

4. A feladat egy hiányosan kitöltött ötödrendű latin négyzet befejezését kéri. Jelöljük $a_{i;j}$-vel az i-edik sor j-edik elemét. A kitöltés során azt kell figyelni, hogy melyik sor-oszlop, sor-átló, oszlop-átló metszésébe mi nem kerülhet be. Egy lehetséges kitöltési sorrend: $a_{3;3}=4$, $a_{5;5}=2$, $a_{2;4}=2$, $a_{5;1}=3$, $a_{2;2}=5$, $a_{3;2}=3$, $a_{5;2}=4$, $a_{2;1}=4$, $a_{4;1}=5$.

8. Jelöljük a fiúkat A-val, B-vel, C-vel, D-vel, a lányokat pedig X-szel, Y-nal, Z-vel. A fiúk csak az első, harmadik, ötödik, hetedik helyre ülhetnek, a lányok pedig a második, negyedik, hatodikra. A fiúknak $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$-féle sorrendje lehetséges, a lányoknak $3\cdot2\cdot1=6$-féle sorrendje, ezért az ültetési sorrendek száma $24\cdot6=144$.

9. Az ilyen típusú feladatok megoldásának alapgondolata a $10=2\cdot5$ egyenlőség felismerése, illetve a két oldal hatványozásával nyert értékek alkalmazása.

A $2^{19}\cdot5^{12}=2^{12}\cdot5^{12}\cdot2^{7}=10^{12}\cdot128=128\,000\,000\,000\,000$. A helyes tipp **E**.

10. Az első újítással emberünk 20%-ot takarít meg, a többi 80%-ot nevezzük „nem megtakarításnak". Így a „nem megtakarítások" szorzata $0{,}8\cdot0{,}75\cdot0{,}45=0{,}27$, tehát 73%-ot takarít meg.

12. A feladat eredményes megoldásához bizonyos matematikai konvenciók alapos ismerete is szükséges, bár ez a szövegben benne van, de a gyerekek hajlamosak figyelmen kívül hagyni.

Első ránézésre látszik, hogy $18\geq C+C\geq10$. Hajlamos lehet a tanuló ebből arra következtetni, hogy $9\geq C\geq5$, tehát 5 megoldás van. Ekkor a helyes tipp D. Sajnos nem. C=5 nem lehet, mert akkor B=0, de elöl nem állhat 0. Egyenlőre a C a helyes tipp. De C=9 esetén B=8, A pedig 9 lesz ám ez tiltott, hiszen $A\neq C$. Már csak 3 megoldási lehetőség maradt, (C=6, 7, 8) ezeket behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy mind jó. A helyes tipp tehát **B**. Az A válasz azoknak kell, akik találtak egy megoldást, de nem elemezték a feladatot komolyabban. Gyakori az „ezek egyike sem" válasz beiktatása, amely azoknak szól, akiknek a gondolkodását nem tudtuk előre kitalálni.

13. A kiíratott számokban a számjegyösszeg 1 és 27 között lehet. Ha az első 27 kiíratott számban a számjegyösszeg páronként különböző, akkor kell még egy 28. számot is kiíratni, s akkor már lesz megfelelő tulajdonságú szám. A feladat a skatulya-elven alapszik. Spontán is meg lehet érezni a skatulya-elvet, de célszerűbb a versenyfelkészítés során megmutatni, gyakoroltatni ezt az egyszerű, de szép feladatmegoldó ötletet.

14. Legyen Marcinak 7x forintja, Gergőnek pedig x. Ekkor az egyenlet: $7x-65=2(x+65)$. Innen $x=39$, így a helyes tipp: E. A feladat megoldása során két nehézséggel kell szembenézni a tanulóknak.

I. Mit jelent az, hogy Marci ad 65 Ft-ot Gergőnek. A tanulók hajlamosak arra, hogy a 65-öt csak az x-hez adják hozzá, de nem veszik el a 7x-ből. A módszertanban ezt a „műveletre utaló szavak fordításának" nevezzük.

II. Mit jelent az, hogy „kétszer annyi pénze lenne". Ilyenkor vagy a kisebbik mennyiséget szorozzuk, vagy a nagyobbat osztjuk. A tanulóknál előfordul, hogy a nagyobbikat szorozzák. A módszertanban ezt a „műveletek eredményére utaló szavak fordításának" nevezzük.

15. Tegyük fel, hogy 100 pont volt a maximum. Ekkor $(20\cdot80+30\cdot70)/(20+30)=74$.
A helyes tipp: B.

20. Egy látszólag köznapi problémához kell az adekvát matematikai modellt megtalálni. A feladat 3 elem ismétlés nélküli permutációinak előállítását kívánja. Ha az A csúcsból a G-be akarunk eljutni, akkor egy jobbra, egy hátra, egy felfele lépés kell. Jelöljük ezeket j-vel, h-val, f-fel. Ezen három elemnek $3\cdot2\cdot1=6$ sorrendje van. Természetesen lehet dolgozni a konkrét konstrukciók előállításával is.

21. A szövegben adott explicit feltételeket kell lefordítani a matematikai szimbólumok nyelvére. A két gyerek pénzének különbsége petákban kifejezve: $25\cdot(5x+1-x-5)=25\cdot(4x-4)$. 10 petákosban kifejezve: $5\cdot(2x-2)=10\cdot(x-1)$. A helyes tipp: A.

25. Az egyenlet: $\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}+7=n$.

26. Jelöljük O-val a BE és az AD egyenesek metszéspontját. A kérdezett szögértéket megkapjuk, ha a 3 háromszög belső szögösszegéből levonjuk az O körül keletkező 360°-os teljes szög felét, mert ez 3 darab csúcsszög párból tevődik össze, ezért a keresett szögérték:

$540°-180°=360°$.

27. Végezzük el a kijelölt műveleteket és egyszerűsítsünk!

28. A feladatban több szám számtani közepét kell szokatlan helyzetben kiszámítani. Az eredeti halmazban a számok összege $50\cdot38$. Ebből le kell vonni $45+55=100$-at, s osztani 48-cal, hiszen ekkor az elemek száma már csak ennyi. A helyes válasz: D.

29. Írjuk a számokat a következő alaknak megfelelően: $999=1000-1=10^3-1$. Ekkor a következő összegről lesz szó: $10+10^2+10^3+\ldots10^{999}-999$, vagyis egy 999 darab 1-essel kezdődő, 0-val végződő számból kell 999-et levonni. A különbségben csak az ezresek helyi értékén lesz nulla, a összes többi helyen 1-es lesz. Tehát az eredményben 999 darab 1-es található.

30. A feladat két mennyiség harmonikus közepének meghatározását igényli. Ennek ismerete nélkül is könnyen kiszámítható, hogy az oda út megtételéhez 6 óra, a vissza úthoz 4 óra kell, azaz összesen 10 óra. Ha egyenletes sebességgel akarunk haladni, akkor a 480 km-t 10 óra alatt kell megtenni. A helyes válasz: 48 km/h. Első ránézésre sokan számtani középre gondolnak

IRODALOM

1. Kiss: Ötletek feleletválasztós matematikai tesztek készítéséhez A Tanító 1997. 10. szám
2. Matematikai versenytesztek. A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai kötetei. Mozaik Oktatási Stúdió Szeged, 1991-1993, 1994, 1995, 1996.
3. Mosonyi Kálmán: Gondolkodási hibák az általános iskolai matematika órákon. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
4. Piaget-Inhelder: A gyermek logikájától az ifjú logikájáig. Akadémiai Kiadó Budapest, 1967.
5. Piaget: Válogatott tanulmányok. Gondolat, Budapest, 1970.
6. Középiskolai matematikai versenytesztek (GORDIUSZ Matekverseny 1996–97) Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft. Debrecen.
7. The MAA Problem Book I-IV. Szerk.: Charles T. Salkind (Math. Association of America) Singer Company.